

Compleitud

Tomás Barrero

Filósofo Universidad Nacional

Magíster en Filosofía UNICAMP (Brasil)

Estudiante de Doctorado en Filosofía Universidad Nacional

e-mail:barrero@unal.edu.co

Abstract

Con este breve resumen pretendo mostrar algunos aspectos importantes de dos pruebas de completitud para lógica clásica, la del cálculo proposicional basada en el método de Kalmár[4] y la primera demostración de completitud para lógica de primer orden a cargo de Gödel[2].

1 El cálculo proposicional clásico

La pregunta por la completitud del cálculo proposicional clásico obtuvo respuesta positiva desde por lo menos la segunda década del siglo XX con los resultados de Post y posteriormente de Kalmár. En la década de los 40, León Henkin presentó con variantes una nueva prueba que conseguía el resultado para el fragmento positivo y permitía extender la construcción mediante la introducción de axiomas para nuevos conectivos. El método general se basaba en reescribir los valores de verdad de las fórmulas en términos de los conectivos disponibles de la lógica y, a partir de un uso repetido del Teorema de Deducción, eliminar sistemáticamente las premisas convirtiendo cualquier tautología en un teorema sin hipótesis.

La codificación lingüística funciona seleccionando los valores de verdad de cada variable y atribuyéndoles una forma lógica. Si nuestra lógica no tiene negación podemos utilizar una técnica como ésta:

$$p_i^* = \begin{cases} p_i \rightarrow c & \text{si } h(p_i) = 0 \\ (p_i \rightarrow c) \rightarrow c & \text{si } h(p_i) = 1 \end{cases}$$

Para el caso de una lógica con negación podemos simplificar la traducción así

$$p_i^* = \begin{cases} p_i & \text{si } h(p_i) = 1 \\ \neg p_i & \text{si } h(p_i) = 0 \end{cases}$$

1.1 La lógica positiva

A continuación presento una lista de los requisitos con los que debe cumplir una fragmento de la lógica proposicional para poder efectuar la prueba de Kalmár.

1. Um conjunto no vacío de conectivos binarios que contiene por lo menos \rightarrow .
2. Símbolos auxiliares.
3. Modus Ponens como regla de inferencia.
4. El Teorema de Deducción: Sea Γ un conjunto cualquiera de fórmulas, α y β fórmulas cualesquiera, entonces:

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

5. El siguiente conjunto de fórmulas derivables:

H1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

H2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$

H3. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow [((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma]$

Ahora presento un crudo esquema de la demostración que depende del siguiente

Lema 1.1.

Sea $h(p_1), \dots, h(p_n)$ una valoración de las diferentes variables p_1, \dots, p_n . Sea α una fórmula que contiene solamente estas variables p_1, \dots, p_n y $h(\alpha)$ el valor asociado a α por la misma valoración. Sea γ una fórmula bien formada cualquiera, definamos α^* como $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$ o $\alpha \rightarrow \gamma$, si $h(\alpha) = 1$ o $h(\alpha) = 0$ respectivamente. Entonces, $p_1^*, \dots, p_n^* \vdash_{L^+} \alpha^*$.

Dem.: Por inducción en el tamaño de α .

Caso 1.1.1. *Sea $\alpha = p_i$.*

Entonces (por la definición de demostración a partir de un conjunto de fórmulas) $(p_i \rightarrow \gamma) \vdash (p_i \rightarrow \gamma)$ y $(p_i \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma \vdash (p_i \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$ y, por tanto, en cualquier caso $p_i^* \vdash p_i^* = \alpha^*$.

Supongamos $\alpha = \beta \rightarrow \delta$ y supongamos, como hipótesis de inducción, que el lema vale para β, δ .

Caso 1.1.2. $h(\beta) = 0$.

Entonces, $\beta^* = (\beta \rightarrow \gamma)$, $h(\alpha) = h(\beta \rightarrow \delta) = 1$ y $\alpha^* = ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$. Por hipótesis de inducción, $p_i^*, \dots, p_n^* \vdash \beta \rightarrow \gamma$, pero, por **H3** $\vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow [((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma]$ y MP, tenemos $p_1^*, \dots, p_n^* \vdash (((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) = \alpha^*$

Caso 1.1.3. $h(\delta) = 1$.

Entonces, $\delta^* = ((\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$, $h(\alpha) = h(\beta \rightarrow \delta) = 1$, e $\alpha^* = ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$. Por hipótesis de inducción, tenemos $p_1^*, \dots, p_n^* \vdash (\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$. Por el **H1**, tenemos $\delta \vdash \beta \rightarrow \delta$, y usando MP obtenemos $\delta, (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma \vdash \gamma$. Por tanto, usando el Teorema de Deducción, concluimos $(\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma \vdash \delta \rightarrow \gamma$, y, de ahí, por MP tenemos $(\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma, (\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma \vdash \gamma$. Luego, por el Teorema de Deducción $(\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma \vdash ((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$ y, entonces, $p_1^*, \dots, p_n^* \vdash (((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) = \alpha^*$.

Caso 1.1.4. Suponga $h(\beta) = 1, h(\delta) = 0$.

Entonces, $\beta^* = (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$, $\delta^* = \delta \rightarrow \gamma$, $h(\alpha) = 0$ y $\alpha^* = (\alpha \rightarrow \gamma)$. Por hipótesis, $p_1^*, \dots, p_n^* \vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$ y $p_1^*, \dots, p_n^* \vdash \delta \rightarrow \gamma$. Entonces, por MP $\beta, \beta \rightarrow \delta \vdash \delta$. Por MP de nuevo tenemos $\beta, \beta \rightarrow \delta, \delta \rightarrow \gamma \vdash \gamma$ y, entonces, usando el Teorema de Deducción

$\beta \rightarrow \delta, \delta \rightarrow \gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$. Entonces, por MP tenemos $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \delta \rightarrow \gamma \vdash \gamma$. Por tanto, usando el Teorema de Deducción

$\delta \rightarrow \gamma, (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma \vdash (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma$. y, entonces, $p_1^*, \dots, p_n^* \vdash ((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma) = \alpha^*$, lo que demuestra el último caso ■.

Teorema 1.2.

Teorema de completitud para L^+ :

$$\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$$

Dem.: Sean p_1, \dots, p_n las diferentes variables que aparecen en α . Entonces tenemos para cada una de las 2^n valoraciones posibles $h(p_1), \dots, h(p_n)$, el valor calculado $h(\alpha)$. Entonces, por el Lema 1.1 si γ es una fórmula bien

formada arbitraria y p_i^*, α^* son definidos como antes, tenemos para cada uno de los 2^n conjuntos posibles $\Gamma_n = \{p_1^*, \dots, p_n^*\}$,

$$\Gamma_n \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

Esto implica que para cada uno de los 2^{n-1} conjuntos $\Gamma_{n-1} = \{p_1^*, \dots, p_{n-1}^*\}$ tenemos

$$p_n \rightarrow \gamma, \Gamma_{n-1} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

y

$$p_n \rightarrow \gamma \rightarrow \gamma, \Gamma_{n-1} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

Usando el Teorema de Deducción, obtenemos

$$\Gamma_{n-1} \vdash (p_n \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$$

$$\Gamma_{n-1} \vdash ((p_n \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$$

Pero, por H3, tenemos

$$\Gamma_{n-1} \vdash [(p_n \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)] \rightarrow$$

$$[(((p_n \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)]$$

y MP dos veces tenemos

$$\Gamma_{n-1} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

Si continuamos así, vemos que para cada $i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$, obtenemos, para cada uno de los 2^i posibles $\Gamma_i = \{p_1^*, \dots, p_i^*\}$

$$\Gamma_i \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

Si $i = 1$, tenemos

$$p_1 \rightarrow \gamma \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma, ((p_1 \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

y, por el Teorema de Deducción y el Axioma 3, tenemos

$$\vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

Como γ es una fórmula cualquiera, en particular es verdad

$$\vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

Pero, tenemos $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha)$ y por MP tenemos

$$\vdash \alpha$$

■.

Podemos extender este método a fragmentos con conectivos n-arios utilizando la convención para codificar los valores de verdad y generando 2^n nuevos axiomas. Tomemos como ejemplo el ó exclusivo:

$$\mathbf{Ax1}^{\vee}. ((\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) \rightarrow [((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\delta \vee \beta) \rightarrow \gamma)]$$

$$\mathbf{Ax2}^{\vee}. ((\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) \rightarrow [(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (((\delta \vee \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)]$$

$$\mathbf{Ax3}^{\vee}. (\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow [((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma) \rightarrow (((\delta \vee \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)]$$

$$\mathbf{Ax4}^{\vee}. (\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow [(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\delta \vee \beta) \rightarrow \gamma)]$$

Ahora demostramos el análogo de Lema1.1 usando estos cuatro axiomas y la prueba se adapta fácilmente.

1.2 La lógica con negación

Usando el mismo esquema de prueba demostramos la completitud para la lógica proposicional con negación. Para cumplir con ese objetivo, podemos introducir una axiomática más numerosa donde se describa el comportamiento de cada conectivo binario y el de la negación. No sobra observar que podríamos utilizar la idea original de Henkin e introducir como axiomas para la negación las siguientes fórmulas¹:

$$\mathbf{Ax1}^{\neg} (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow [(\neg\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma]$$

$$\mathbf{Ax2}^{\neg} [(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma] \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \gamma)$$

aunque prefiero usar una axiomática común[1]:

$$\mathbf{Ax1.} \vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\mathbf{Ax2.} \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

¹Le agradezco a Edgar Andrade esta sugerencia.

Ax3. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta]$

Ax4. $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$

Ax5. $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

Ax6. $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

Ax7. $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$

Ax8. $\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

Ax9. $\vdash \beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

Ax10. $\vdash [(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha] \rightarrow \beta$

Con **Ax2** y **Ax4** obtenemos el Teorema de Deducción y con **Ax1-10** y el Teorema de Deducción obtenemos las siguientes fórmulas derivables:

1. $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
2. $\vdash \alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$
3. $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta))$
4. $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$

A partir de estos resultados demostramos el siguiente Lema (análogo al Lema1.1):

Lema 1.3.

Sea $h(p_1), \dots, h(p_n)$ una valoración de las diferentes variables p_1, \dots, p_n . Sea α una fórmula que contiene solamente estas variables p_1, \dots, p_n y $h(\alpha)$ el valor asociado a α por la misma valoración. Sea γ una fórmula bien formada cualquiera, definamos α^* como α o $\neg\alpha$, si $h(\alpha) = 1$ o $h(\alpha) = 0$ respectivamente. Entonces, $p_1^*, \dots, p_n^* \vdash_{L+} \alpha^*$.

Contando con esta traducción de los valores de verdad a conectivos de la lógica demostramos

Teorema 1.4.

Teorema de completitud para L:

$$\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$$

Para la demostración, repetimos el proceso del Teorema 1.2 pero escribiendo en cada caso

$$\neg p_n, \Gamma_{n-1} \vdash \alpha$$

y

$$p_n, \Gamma_{n-1} \vdash \alpha.$$

Ahora usamos el Teorema de Deducción y obtenemos

$$\Gamma_{n-1} \vdash \neg p_n \rightarrow \alpha$$

y

$$\Gamma_{n-1} \vdash p_n \rightarrow \alpha$$

lo que, junto con el **Ax3**, me permite concluir

$$\Gamma_{n-1} \vdash \alpha$$

■.

2 La lógica de primer orden

El problema de la completitud de la lógica de primer orden reviste algunas dificultades debido a la necesidad de interpretar los cuantificadores mediante un modelo infinito. La primera prueba de completitud, propuesta por Gödel en 1930 [2], utiliza una estrategia *reductiva* toda vez que demuestra el resultado para una clase específica de fórmulas cuya validez determina la de cualquier fórmula de primer orden.

La prueba de Henkin[5], por el contrario, funciona mediante una estrategia *extensiva*: se toma como base un sistema formal, se lo completa utilizando la idea de que a cada fórmula existencial le corresponde una fórmula con una constante que funciona como testigo y verificando que la extensión no daña la propiedad de ser consistente. En lo que sigue voy a presentar un esquema somero de la prueba de Gödel en el que pasaré por alto algunas demostraciones y me concentraré en los resultados centrales.

2.1 El sistema formal

Gödel parte del sistema formal de *Principia Mathematica* que estaba en boga en la época, aunque resulte incómodo para un lector contemporáneo. También lista ([2] pp. 25-26) una serie de resultados que no necesitamos en su totalidad para este resumen y de los que selecciono en esta sección apenas aquellos que nos permiten entender la prueba en términos generales.

2.1.1 Axiomas

PM1. $\vdash (\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$

PM2. $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

PM3. $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

PM4. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [(\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \beta)]$

PM5. $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$

PM6. $\vdash \forall x(\psi \vee \varphi(x)) \rightarrow \psi \vee \forall x\varphi(x)$ si x no es libre en ψ

Las reglas de inferencia son:

r.1 Modus Ponens: $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$

r.2 Sustitución entre variables proposicionales y predicativas

r.3 Generalización: $\varphi(y) / \forall x(\varphi(x))$

r.4 Sustitución de unas variables individuales por otras cuando no exista conflicto entre el alcance de los cuantificadores

Los lemas fundamentales para entender el resultado son:

l.1 $\vdash \forall x\neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists x(\varphi(x))$

l.2 El Teorema 1.4

Introducimos además las siguientes definiciones

Definición 2.1.

Definimos la clase de las \mathcal{K} -fórmulas con los siguientes requisitos

1. Cada \mathcal{K} -fórmula es prenexa

2. Cada \mathcal{K} -fórmula es una sentencia (sin variables libres)
3. El prefijo de cada \mathcal{K} -fórmula comienza con un cuantificador universal y termina con un existencial

Definición 2.2.

El *grado* de una fórmula es el número de series de cuantificadores universales en su prefijo separadas por cuantificadores existenciales.

Definición 2.3.

Dada una \mathcal{K} -fórmula de primer grado $\forall \mathfrak{r} \exists \eta \varphi(\mathfrak{r}; \eta)$ (abreviada $\pi\varphi$) donde \mathfrak{r} representa los r -tuplos y η los s -tuplos vamos a definir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= (x_0, x_0, \dots x_0) \\ \mathfrak{r}_2 &= (x_1, x_0, \dots x_0) \\ \mathfrak{r}_3 &= (x_0, x_1, \dots x_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

lo que nos permite definir la sucesión $\{\varphi_n\}$ de fórmulas derivadas de $\pi\varphi$ así:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi(\mathfrak{r}_1; x_1, x_2, \dots x_s) \\ \varphi_2 &= \varphi(\mathfrak{r}_2; x_{s+1}, x_{s+2}, \dots x_{2s}) \wedge \varphi_1 \\ &\vdots \\ \varphi_n &= \varphi(\mathfrak{r}_n; x_{(n-1)s+1}, x_{(n-1)s+2}, \dots x_{ns}) \wedge \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

Definimos entonces

$$\pi_n \varphi_n = \exists x_0 \exists x_1 \dots \exists x_{ns} \varphi_n.$$

Definición 2.4.

Un modelo \mathfrak{A} es un submodelo o subestructura de otro \mathfrak{B} , en símbolos $\mathfrak{A} \in \mathfrak{B}$ si

1. A , el *dominio* de \mathfrak{A} es subconjunto de B , el dominio de \mathfrak{B} , en símbolos $A \subseteq B$.
2. $\mathbb{R}^{\mathfrak{A}} = \mathbb{R}^{\mathfrak{B}} \upharpoonright \mathfrak{A}$, es decir la restricción de las relaciones de \mathfrak{B} a \mathfrak{A} coincide con las relaciones de \mathfrak{A} .

3. Para cada i , $v_i^{\mathfrak{A}} = v_i^{\mathfrak{B}}$, es decir los valores veritativos atribuidos por \mathfrak{A} coinciden con los atribuidos por \mathfrak{B} .

Luego de estas precisiones vamos a demostrar el

Teorema 2.5.

Teorema de Completitud: Toda fórmula válida de primer orden sobre un universo infinito enumerable es deducible, en símbolos

$$\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$$

Para demostrar el Teorema 2.5 usamos

Teorema 2.6.

Toda fórmula α de primer orden es satisfacible sobre un universo infinito enumerable o refutable (es decir $\vdash \neg\alpha$.)

En efecto, supongamos que α es válida, es decir, es satisfacible en cualquier universo infinito enumerable y, por lo tanto $\neg\alpha$ no es satisfacible sino refutable, es decir $\vdash \neg\neg\alpha$ y de ahí tenemos $\vdash \alpha$. Supongamos ahora que α no es válida, lo que quiere decir que existe un universo infinito enumerable donde $\neg\alpha$ es satisfacible y por lo tanto no es refutable, es decir $\not\vdash \neg\neg\alpha$ y por contraposición obtenemos $\not\vdash \alpha$.

Para demostrar el Teorema 2.6 usamos

Teorema 2.7.

Si cada \mathcal{K} -fórmula es refutable o satisfacible, también lo es cualquier fórmula.

Esquemáticamente, para este resultado tomamos cualquier fórmula que no pertenece a la clase \mathcal{K} y demostramos una equivalencia sintáctica entre su forma normal prenexa y un fórmula que pertenece a \mathcal{K} .

Este resultado resulta útil para el Teorema de Completitud si cada \mathcal{K} -fórmula es refutable o satisfacible, lo que se demuestra por inducción sobre el grado de las \mathcal{K} -fórmulas a través de los dos teoremas siguientes:

Teorema 2.8.

Si cada \mathcal{K} -fórmula de grado n es satisfacible o refutable, entonces también lo es cada \mathcal{K} -fórmula de grado $n + 1$.

La demostración de este teorema usa recurrentemente teoremas sobre intercambio de cuantificadores mediante variables nuevas. Sólo queda por demostrar la base de la inducción, es decir el

Teorema 2.9.

Toda \mathcal{K} –fórmula de primer grado es refutable o satisfacible.
Pero para demostrar este teorema usamos el siguiente

Teorema 2.10.

Para cada $n, \vdash \pi\varphi \rightarrow \pi_n\varphi_n$.

La demostración es por inducción sobre n y utiliza resultados con respecto a los cuantificadores del mismo tipo de los usados en el Teorema 2.8.

Si cada φ contiene variables predicativas ρ_1, \dots, ρ_k y las variables proposicionales p_1, \dots, p_l , entonces φ_n se obtiene mediante la aplicación exclusiva de los conectivos \neg y \vee sobre los componentes del tipo $\rho_i(x_{p_i}, \dots, x_{q_i})$ y p_i . Ahora necesitamos, por una parte, mostrar el modelo que satisface a los diferentes $\pi_n\varphi_n$ y, por otra, hacer depender la satisfacibilidad o refutabilidad de φ_n de una fórmula proposicional β_n construida a partir de φ_n . Definimos como \mathfrak{M}_n , *modelo de nivel n de $\pi\varphi$* una estructura con dominio $M_n \subseteq \mathbb{N}$ que incluye

1. Un sistema de relaciones $R_1^n \dots R_k^n$ para $z \in \mathbb{N}$ con $0 \leq z < ns$
2. Un sistema de valores de verdad $w_1^n, w_2^n \dots w_l^n$ para las variables proposicionales p_1, \dots, p_l de φ_n .

Decimos que \mathfrak{M}_n satisface $\pi\varphi$, en símbolos $\mathfrak{M}_n \models \pi\varphi$ si y solo si

1. A cada variable predicativa ρ_i de φ_n que alcanza las variables individuales x_1, \dots, x_i le hacemos corresponder un R_i^n tal que $R_i^n(1, \dots, i)$ se da.
2. A cada variable proposicional p_i de φ_n le hacemos corresponder un valor de verdad w_i^n que la hace verdadera.

β_n se construye substituyendo todos los componentes elementales diferentes de φ_n por variables proposicionales diferentes, así que β_n es una fórmula proposicional en forma normal. Por el Teorema 1.2, cada β_n es satisfacible o refutable entonces tenemos dos opciones:

- (a) Hay por lo menos un β_n refutable, es decir $\vdash \neg\beta_n$. Por **r.2** tenemos $\vdash \neg\varphi_n$, por **r.3** $\vdash \forall_{x_0}\forall_{x_1}\dots\forall_{x_{ns}}\neg\varphi_n$ y por **l.1** tenemos $\vdash \neg\pi_n\varphi_n$. Por contraposición con el Teorema 2.10, obtenemos $\vdash \neg\pi\varphi$, es decir la refutabilidad de $\pi\varphi$.

- (b) No hay un β_n refutable, es decir, todos los β_n son satisfacibles. Pero eso quiere decir que hay modelos *finitos* para cada nivel y cada modelo de nivel $n + 1$ contiene todos los modelos de niveles menores o iguales a n porque cada φ_n es una conjunción y por lo tanto cada uno de sus miembros debe ser satisfacible. Estas dos características permiten construir una sucesión de modelos $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_k$ tal que $\mathfrak{M}_1 \in \mathfrak{M}_2 \in \dots \in \mathfrak{M}_k$.

Definimos ahora el modelo $\mathfrak{S} = \{\langle \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_k \rangle; \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle\}$ con dos condiciones:

- (b1) $\mathfrak{S} \models S_p(a_1 \dots a_i), 1 \leq p \leq k$ si y sólo si existe un n tal que $\mathfrak{M}_n \models R_p^n(a_1 \dots a_i)$ y, por lo tanto $\mathfrak{M}_m \models R_p^m(a_1 \dots a_i)$ para $m > n$.
- (b2) $v_i = w_i^n, 1 \leq i \leq l$ para al menos un n, \mathfrak{M}_n y, por lo tanto para todo \mathfrak{M}_m con $m > n$.

Debido a la construcción de las φ_n , es claro que $\mathfrak{S} \models \varphi_n$ para todo n , es decir $\mathfrak{S} \models \varphi$ y por lo tanto φ es satisfacible y termina la prueba del teorema ■.

References

- [1] Richard Epstein, Walter Carnielli *Computability. Computable Functions, Logic and the Foundations of Mathematics*, Wadsworth, Belmont, (2000, 2ª edición)
- [2] K. Gödel, La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden. En [3] 19-37.
- [3] K. Gödel *Obras Completas*, Alianza, Madrid, 1981
- [4] L. Henkin, Fragments of propositional calculus, *The Journal of Symbolic Logic*. 14 (1) (1949) 42-48
- [5] L. Henkin, The Completeness of the First-Order Functional Calculus, *The Journal of Symbolic Logic*. 14 (3) (1949) 159-166